الدرس 12-5 مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) وتساوي زاويتين وضلع (SAA)

السابق

- لقد برهنت على تطابق مثلثين باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) وتساوي ضلعين وزاوية (SAS).

الحالي

1. استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لاختبار التطابق.
2. استخدام نظرية تساوي زاويتين وضلع (AAS) لاختبار التطابق.

لماذا؟

- تتضمن رياضة التجديف بالتجذيف، وتُسمى أيضًا الطاقم، شخصين أو أكثر يجلسون بمواجهة مؤخرة القارب ويسحب كل مجذف مجدافًا واحدًا، في مسابقات المدرسة الثانوية، يتطلب السباق الذي يُسمى ريغاتا في العادة مسطحًا مائيًا يزيد طوله على 1500 متر. يمكن استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة بسهولة، مثل طول مسار الريغاتا.

المفردات الجديدة

ضلع محصور
included side

إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

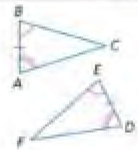
1 مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

الضلع المحصور هو الضلع الموجود بين زاويتين متتاليتين في مضلع. في $\triangle ABC$ على اليسار، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$ و $\angle C$.

المسلّمة 12.3 تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

عند تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث آخر، يكون المثلثان متطابقان.

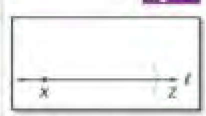
مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$،
والضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$،
الزاوية $\angle B \cong \angle E$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



الإنشاء مثلثان متطابقان باستخدام زاويتين والضلع المحصور بينهما

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$. ثم استخدم مسلّمة تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإنشاء $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

الخطوة 1



ارسم المستقيم ℓ وحدد النقطة X. وقم بإنشاء $\overline{XZ}$ بحيث $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2

أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle A$، عند X باستخدام $\overrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية.

الخطوة 3

أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle C$، عند Z باستخدام $\overrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية. ضع اسمًا للنقطة التي يلتقي عندها الضلعان الجديدان للزوايا Y.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-5 إثبات تطابق المثلثات باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS).

الدرس 12-5 استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (ASA) ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (AAS) لاختبار تطابق المثلث.

بعد الدرس 12-5 استخدام مسلّمات تطابق المثلثات لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- في الفقرة، هناك ادّعاء يقول إنه يمكن قياس مسار السباق بطريقة غير مباشرة. فإلى أيّ سطح ستحوّل طول المسار؟ الأرض أو الشاطئ
- لتقدير المسافة من الشاطئ حتى نقطة بداية السباق، قف عند نقطة تكون عمودية على خط بداية السباق وانظر مباشرة إلى نقطة البداية. اجعل عينيك ثابتتين

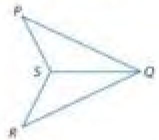
ورقبتك كذلك، وقم بلف جسمك لتصبح على نفس الخط البصري للنقطة على الأرض. قِس بعد ذلك المسافة من مكان وقوفك إلى النقطة التي أنشأتها على الأرض. لقد أنشأت ثوا مثلثين متطابقين؛ كيف تثبت ذلك؟ لأنك قائم عموديًا على الأرض، فتتكوّن من ذلك زاويتان قائمتا الزاوية متطابقتان. الزوايا الناتجة من الخط البصري متساوية وكذلك ارتفاعك عن الأرض متساوٍ في كلا المثلثين. ولذلك، فالمثلثان المتكونان متطابقان حسب المسلّمة *ASA*؛ وكذلك حسب النظرية *CPCTC*؛ فإنّ المسافات متساوية.

مثال 1 استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإثبات أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$؛
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$؛ $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1. المعطيات
2. $\angle PQS \cong \angle RQS$	2. تعريف منصّف الزاوية
3. $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3. خاصية الانعكاس في التطابق
4. $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4. مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

تمرين موجّه

1. اكتب برهانًا تسلسليًا. **انظر الهامش.**
المعطيات: $\overline{ZX}$ ينصف $\angle WZY$، $\overline{XZ}$ ينصف $\angle YXW$.
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

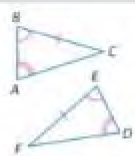
2 نظرية تساوي زاويتين وضلع

تطابق زاويتين وضلع غير محصور كافٍ أيضًا للبرهنة على تطابق مثلثين. تمثل علاقة التطابق هذه نظرية لأنها يمكن البرهنة عليها باستخدام نظرية الزوايا الثالثة.

النظرية 12.5 تطابق بتساوي زاويتين وضلع (AAS)

عند تطابق زاويتين والضلع غير المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين وضلع متناظرين في مثلث آخر، فالمثلثان متطابقان.

مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$،
الزاوية $\angle B \cong \angle E$،
و الضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



إثبات نظرية زاويتين وضلع

المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

$\angle L \cong \angle Q$ المعطيات
$\angle M \cong \angle R$ المعطيات
$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ المعطيات
$\angle N \cong \angle S$ نظرية الزوايا الثالثة
$\triangle LMN \cong \triangle QRS$ مسلّمة زاويتين وضلع

1 مسلّمة تساوي زاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

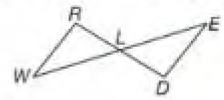
المثال 1 يوضّح طريقة استخدام مسلّمة ASA في البرهان.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب برهانًا من عمودين.
المعطيات: L هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{WE}$
$\overline{WR} \parallel \overline{ED}$
المطلوب: $\triangle WRL \cong \triangle EDL$



البرهان:
العبارات (المبررات)

1 L هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{WE}$ (معطيات)
2 $\overline{WL} \cong \overline{LE}$ (نظرية نقطة المنتصف)
3 $\overline{WR} \parallel \overline{ED}$ (معطيات)
4 $\angle W \cong \angle E$ (نظرية الزوايا الداخلية)
5 $\angle WLR \cong \angle ELD$ (نظرية الزوايا الرأسية)
6 $\triangle WRL \cong \triangle EDL$ (مسلّمة ASA)

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

1.
$\overline{ZX}$ ينصف $\angle WZY$ المعطيات
$\angle WZX \cong \angle YZX$ تعريف منصّف الزوايا
$\overline{ZX}$ ينصف $\angle YXW$ المعطيات
$\angle WXZ \cong \angle YXZ$ تعريف منصّف الزوايا
$\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ خاصية الانعكاس
$\triangle WXZ \cong \triangle XZY$ مسلّمة ASA

التركيز على محتوى الرياضيات

التدخل التقويمي قد يسأل الطالب عن إثبات التطابق باستخدام المسلّمة SSA. وضّح أن المثلثين اللذين بهما يتطابق زوجان من الأضلاع والزوايا غير المحصورة لا يكونان بالضرورة متطابقين. فموقع الزوايا بالنسبة إلى أضلاع المثلث هو أمرٌ حاسمٌ وأساسيٌ لإثبات التطابق.

مثال 2 استخدام مسلّمة زاويتين وضلع لإثبات أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا من عمودين.

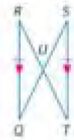
المعطيات: $DAC \cong \angle BEC\angle$

$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: نعلم أن $\angle DAC \cong \angle BEC$ و $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ $\angle C \cong \angle C$ حسب خاصية الانعكاس. حسب مسلّمة ضلعين وزاوية $\triangle ACD \cong \triangle ECB$.

تمرين موجّه



2. اكتب برهانًا تسلسليًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

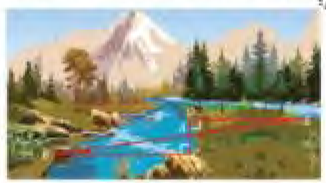
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ و $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي من الصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من الحياة اليومية تطبيق تطابق المثلثات

الخدمة المجتمعية يعمل خلف ضمن مجموعة للخدمة المجتمعية لبناء جسر يعبر قناة في حديقة محلية. سيغطي الجسر القناة بين النقطتين C و B. حدد خلف النقطة الثابتة D لاستخدامها كنقطة مرجعية بحيث يكون بين القطع العلاقات الموضحة. A نقطة منتصف $\overline{CD}$ و DE تساوي 5 أمتار. ما الطول المطلوب للجسر؟



لتحديد طول $\overline{CB}$، يجب أن نبرهن أولاً على أن المثلثين اللذين ضمنهما خلف متطابقان.

- بما أن $\overline{CB}$ متعامد على كل من $\overline{CB}$ و $\overline{DE}$، تشكل القطع مثلثات قائمة الزاوية كما يظهر على الرسم التخطيطي.
- كل الزوايا القائمة متطابقة. إذًا $\angle EDA \cong \angle BCA$.
- النقطة A هي نقطة المنتصف في $\overline{CD}$. إذًا $\overline{CA} \cong \overline{AD}$.
- $\angle BAC$ و $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس، ولذلك فهما متطابقتان.

ولهذا وبموجب مسلّمة زاويتين وضلع محصور بينهما، فإن $\triangle EAD \cong \triangle BAC$.

بما أن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ حسب CPCTC. بما أن قياس $\overline{DE}$ هو 5 أمتار، إذًا قياس $\overline{CB}$ كذلك 5 أمتار. إذًا الطول المطلوب للجسر هو 5 أمتار.

نصيحة دراسية

تطابق الزوايا الثلاث في المثال 3، $\angle B$ و $\angle E$ متطابقتان حسب نظرية الزوايا الثالثة. إلا أن تطابق الزوايا المتناظرة الثلاثة معًا لا يكفي للبرهنة على أن المثلثين متطابقان.

2 نظرية تطابق زاويتين وضلع (AAS)

المثال 2 يوضّح طريقة إثبات تطابق مثلثين باستخدام النظرية 4.5.

المثال 3 يوضّح طريقة استخدام المثلثات المتطابقة في قياس المسافات بطريقة غير مباشرة.

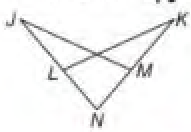
أمثلة إضافية

2 اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات: $\angle NKL \cong \angle NJM$

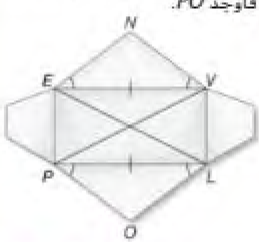
$\overline{KL} \cong \overline{JM}$

المطلوب: $\overline{LN} \cong \overline{MN}$



البرهان:
$\angle NKL \cong \angle NJM$، $\overline{KL} \cong \overline{MN}$ و $\angle N$ $\cong \angle N$ طبقًا لخاصية الانعكاس. ومن ثم، $\triangle JNM \cong \triangle KNL$ طبقًا لمسلّمة AAS. وفقًا للنظرية $\overline{LN} \cong \overline{MN}$ .CPCTC

3 **التصنيع** تصمّم ميساء قالبًا ورقيًا لمظروفٍ معين. قامت بتصميم اللسان العلوي واللسان السفلي على هيئة مثلثين متساويَي الساقين بهما قاعدتان متطابقتان وزوايا قاعدة متطابقة. إذا كان $EV = 8$ cm وارتفاع المثلث المتساوي الساقين يساوي 3 cm، فأوجد PO.



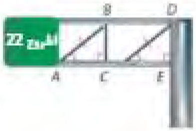
$PO = 5$ cm

انتبه!

أين الضلع؟ يمكن استخدام المسلّمة AAS فقط عند عدم وجود الضلع بين الزاويتين.

التدريس المتمايز BL OL

تمرين شخصي اطلب من الطلاب دراسة براهين الأمثلة الموجودة في هذا الدرس وملاحظة الخواص المتكررة، مثل خواص انعكاس الزوايا، والقطع المستقيمة، والمنصفات، ونقاط المنتصف، وغيرها. يستطيع الطلاب أن يبدؤوا بمشاهدة بعض الأشياء أثناء عملهم على البراهين والتي يمكن أن تتضمّن الخواص المتكررة، والنظريات، والصيغ، والطرق التي يمكنهم الرجوع إليها في الدروس اللاحقة. كما يمكنهم النظر إلى ترتيب الخطوات في البراهين الحرّة، والبراهين التسلسلية، والبراهين ذات العمودين من أجل معرفة التشابهات والاختلافات.



تمرين موجّه

3. في مظلة اللافتة الظاهرة على اليسار، $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}$، $\angle BAC \cong \angle DCE$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. واكتب برهان حرّ لإثبات أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$. **انظر الهامش.**

لقد تعلمت عدة طرق للبرهنة على تطابق المثلثات.

ملخص المفهوم البرهنة على تطابق المثلثات

ضلع-ضلع-ضلع	ضلع-زاوية-ضلع	زاوية-ضلع-زاوية	ضلع-ضلع-زاوية
			
تطابق ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة.	تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المتناظرين غير المحصورين.

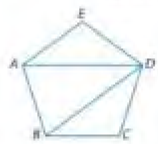
التحقق من فهمك

مثال 1 **البرهان** اكتب النوع المحدد من البراهين. **1-4. انظر الهامش.**

1. برهان تسلسلي

المعطيات: خماسي منتظم $ABCDE$

المطلوب: $\overline{AD} \cong \overline{DB}$



2. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{WT} \parallel \overline{NE}, \overline{TO} \cong \overline{EO}$

المطلوب: $\triangle WOT \cong \triangle NOE$

مثال 2

3. برهان حرّ

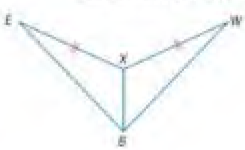
المعطيات: $\overline{RV} \parallel \overline{TW}; \overline{RT} \parallel \overline{VW}$

المطلوب: $\triangle RWV \cong \triangle WRT$

4. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{EX} \cong \overline{WX}$، $\overline{XB}$ ينصف $\angle EXW$ و $\angle EBW$

المطلوب: $\triangle EXB \cong \triangle WXB$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات موضحين كيفية إثبات أن المثلثين متطابقان مستخدمين مسلّمة ASA و/أو مسلّمة AAS. وانشر مقاطع الفيديو على موقع ويب لمشاركة مواقع الفيديو واجعل كل مجموعة تشاهد مقاطع فيديو المجموعات الأخرى.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 5-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. لدينا في المعطيات $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}, \angle BAC \cong \angle DCE,$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. بما أن $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}$ و $\angle BCA$ و $\angle DEC$ عبارة عن زوايا قائمة. $\angle BCA \cong \angle DEC$ وهذا لأن جميع الزوايا القائمة تكون متطابقة. بعد ذلك، وطبقًا لمسلّمة AAS، $\triangle BAC \cong \triangle DCE$. ومن ثم، $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ وفقًا للنظرية CPCTC.

إجابات إضافية

1. 

2. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{WT} \parallel \overline{NE}; \overline{TO} \cong \overline{EO}$ (معطيات)
2. $\angle OTW \cong \angle OEN$، $\angle OWT \cong \angle ONE$ (الخطوط المتوازية يقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة)
3. $\triangle WOT \cong \triangle NOE$ (مسلّمة AAS)

3. إذا قطع خط مستعرض خطين متوازيين، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة. ومن ثم، $\angle 1 \cong \angle 3; \angle 2 \cong \angle 4$ و $\overline{RW} \cong \overline{RW}$ طبقًا لخاصية الانعكاس. $\triangle RWV \cong \triangle WRT$ وفقًا لخاصية التطابق للمسلّمة ASA.

4. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{EX} \cong \overline{WX}$، $\overline{XB}$ ينصف $\angle EBW$ و $\angle EXW$ (معطيات)
2. $\angle EXB \cong \angle WXB; \angle EBX \cong \angle WBX$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\triangle EXB \cong \triangle WXB$ (مسلّمة AAS)

إجابات إضافية

5a. نحن نعلم أن $\angle BAE$ و $\angle DCE$ متطابقتان لأنهما زاويتان قائمتان. $\overline{AE}$ متطابق مع $\overline{EC}$ حسب نظرية نقطة المنتصف. وحسب نظرية الزوايا المتقابلة الرأسية، $\angle DEC \cong \angle BEA$. حسب المسلّمة ASA، فإن المسّاح يعرف أنّ $\triangle DCE \cong \triangle BAE$. وفقًا للنظرية CPCTC، $\overline{DC} \cong \overline{AB}$. إذًا، يستطيع المسّاح قياس $\overline{DC}$ ويعرف المسافة بين A و B.

6. البرهان: وفقًا لتعريف منصّف الزاوية، $\angle XYW \cong \angle XWY \cong \angle ZWY$ و $\angle ZYW$. يتشارك المثلثان في الضلع WY. وفقًا لخاصية الانعكاس، $\overline{WY} \cong \overline{YW}$ وفقًا للمسلّمة ASA، $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$.

7. البرهان: يوجد خطان متعامدان على الخط نفسه، وهما موازيان لبعضهما البعض. ومن ثم، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. عندما يقطع خط مستعرض خطوطًا متوازية، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة، $\angle BCA \cong \angle DAC$ ،$\angle BAC \cong \angle DCA$. يتشارك المثلثان في الضلع AC. ومن ثم، تعرفنا خاصية الانعكاس أن $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفقًا للمسلّمة ASA، $\triangle ACD \cong \triangle CAB$.

8. البرهان: البطاقات متساوية في الحجم. وهذا ما يجعل الضلعان متطابقين. إذا تم وضع البطاقات بالزاوية نفسها، فإن المثلثات ستكون متطابقة وفقًا لمسلّمة SAS. والبطاقات الأفقية التي تشكّل الأرضيات تشبه الخطوط المتوازية. والبطاقات التي تشكّل جوانب المنزل تشبه الخطوط المستعرضة. ومن ثم، تكون الزوايا الداخلية المتبادلة والمتناظرة متطابقة. باستخدام تلك الخصائص، نحصل على منزل ثابت من البطاقات.

مثال 3

5. بناء الجسور تحتاج مهندسة مسح إلى إيجاد المسافة من النقطة A إلى النقطة B عبر أحد الأودية. وضعت وتدًا عند A، ووضع زميل لها وتدًا عند B على الجانب الآخر من الوادي. ثم حددت مهندسة المسح النقطة C على نفس الجانب من الوادي الموجود عليه A بحيث $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. تم وضع وتد رابع عند E، نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا، تم وضع وتد عند D بحيث إن $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ويقع D، و E، و B على الخط نفسه.

a. اشرح كيف تستطيع مهندسة المسح استخدام المثلثات التي تشكلت لإيجاد AB. **انظر الهامش.**

b. إذا كان $AC = 1500$ مترًا، و $DC = 690$ مترًا، و $DE = 973.5$ مترًا فما قياس AB؟ اشرح تبريرك.

690 m، بما أن $DC = 690$ m و $\overline{DC} \cong \overline{AB}$، فحسب تعريف التطابق، يكون $AB = 690$ m.

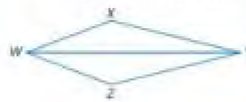
التمرين وحل المسائل

مثال 1

البرهان اكتب برهانًا حرًّا. **6–7. انظر الهامش.**

6. المعطيات: $\overline{WY}$ ينصف $\angle XWZ$ و $\angle XYZ$

المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$



7. المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

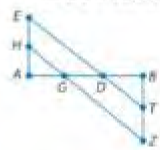
8. الألعاب الصورة على اليسار توضح بيت بطاقات. بيت البطاقات هو هيكل ناتج من تكديس بطاقات اللعب فوق بعضها. اشرح كيف تساعد الخطوط المتوازية والمثلثات المتطابقة من يحاول بناء بيت بطاقات. **انظر الهامش.**

مثال 2

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **9–10 انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

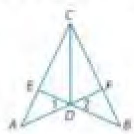
9. المعطيات: $\overline{HZ} \parallel \overline{ET}$; $\overline{AC} \cong \overline{BD}$; $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BGZ$



10. المعطيات: $\triangle CDB \cong \triangle CDA$

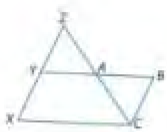
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BDF$



11. فرضيات اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{AY} \cong \overline{BA}$; $\overline{ZX} \parallel \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{YZ} \cong \overline{BC}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



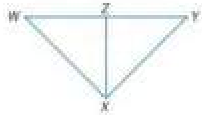
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	6–13, 22–24, 26–36	7–13 ,فردي 27–30	6–12 ,زوجي 22–24, 26, 31–36
OL أساسي	7–15 ,فردي 16, 17–21 ,فردي 21–24, 26–36	6–13, 27–30	14–24, 26, 31–36
BL متقدم	14–36		

12. **البرهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

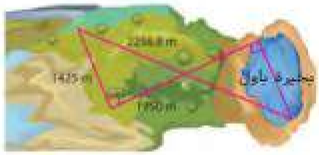
المعطيات: $\overline{XZ}$ هو المنصف العمودي لـ $\overline{WY}$

المطلوب: $\angle W \cong \angle Y$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



مثال 3

13. **تمثيل النماذج** تريد مدرسة ثانوية أن تقيم سباق تجديف طوله 1500 متر على بحيرة ناول لكنها غير متأكدة مما إذا كانت البحيرة طويلة بما يكفي. لقياس المسافة عبر البحيرة، يحدد أعضاء الطاقم رؤوس المثلثات أدناه ويتوصلون إلى قياسات أطوال $\triangle HJK$ كما يظهر أدناه.



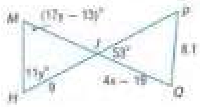
a. اشرح كيف يستطيع فريق الطاقم استخدام المثلثات التي تتشكل لتقدير مسافة FG عبر البحيرة. **انظر الهامش.**

b. باستخدام القياسات المعطاة، هل البحيرة طويلة بما يكفي لكي يستخدمها الفريق كموقع لسباقهم؟ **اشرح تبريرك.** **لا؛ $HJ = 1425$ m، إذًا $FG = 1425$ m. إذا كان السباق سيبلغ 1500 m، فالبحيرة ليست طويلة بما يكفي، بما أن $1500 > 1425$.**

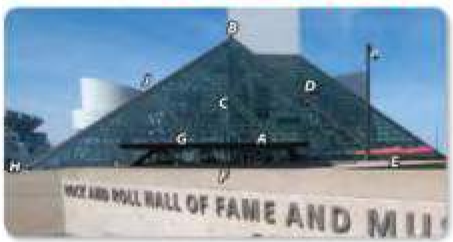
الجبر أوجد قيمة المتغير الذي يعطي مثلثات متطابقة.

14. $\triangle BCD \cong \triangle WXY$ $x = 4.5;\ y = 8$

15. $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$ $x = 7,\ y = 5$



16. **تصميم المسرح** تبدو الأطواق المعدنية لسقف المسرح المكشوف الظاهر أدناه مكونة من عدة أنواع مختلفة من المثلثات المتطابقة. افترض أن الأطواق المعدنية التي يبدو أنها تقع على خط واحد تقع فعلًا على خط واحد. **16a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



a. إذا كان $\overline{AB}$ ينصف $\angle CBD$ و $\angle CAD$، فبرهن على أن $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

b. إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ و $\angle FCA \cong \angle EDA$، فبرهن على أن $\triangle CAF \cong \triangle DAE$.

c. إذا كان $\angle BHG \cong \angle BEA$ و $\overline{HB} \cong \overline{EB}$ و $\angle HGJ \cong \angle EAD$ و $\angle JGB \cong \angle DAB$، فبرهن على أن $\triangle BHG \cong \triangle BEA$.

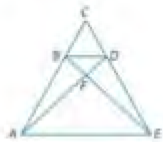
إجابة إضافية

13a. بما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، $\angle GFK \cong \angle HJK$. وتقول المعطيات إن $\overline{JK} \cong \overline{KF}$ و $\angle HKJ$ و $\angle FKG$ زاويتان متقابلتان بالرأس. إذًا $\angle HKJ \cong \angle FKG$ بناءً على نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس. وبناءً على مسلّمة ASA، يكون $\triangle HJK \cong \triangle GFK$. إذًا $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$ بناءً على نظرية CPCTC.

البرهان اكتب برهانًا حرًّا. 18–17. **انظر الهامش.**

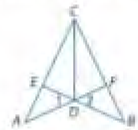
17. **المعطيات:** $\overrightarrow{RS}$ ينصف $\angle CSA$ و $\angle CHA$
المطلوب: $\triangle CHS \cong \triangle AHS$

18. **المعطيات:** $\triangle BDF$ متساوي الأضلاع، $\angle BAD \cong \angle DEB$
المطلوب: $\triangle BAD \cong \triangle DEB$



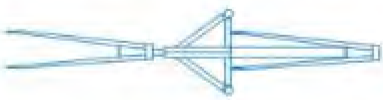
البرهان اكتب برهانًا من عمودين. 20–19. **انظر الهامش.**

19. **المعطيات:** $\angle CED \cong \angle CFD$، $\overline{CD}$ ينصف $\angle ECF$
المطلوب: $\triangle CED \cong \triangle CFD$



20. **المعطيات:** $\overline{VK} \perp \overline{KX}, \overline{EM} \perp \overline{MX}; \overline{KX} \cong \overline{MX}$
المطلوب: $\angle V \cong \angle E$

21. **الدراجة الثلاثية** يصور الرسم أدناه هيكل دراجة ثلاثية يتم النظر إليها من الجو.



a. عيّن نوعين من المثلثات المستخدمة لعمل الهيكل الأساسي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

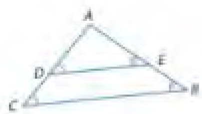
b. ما المعلومات المطلوبة لإثبات تطابق المثلثات؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

23. خليفة على صواب، لا يمكن أن يكون المثلثان متطابقين. بالرغم من أن جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، لكن الأضلاع غير متطابقة. إذًا، المثلثان غير متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

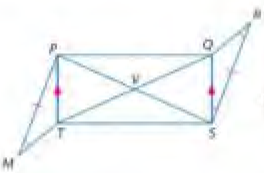
22. **الكتابة في الرياضيات** باستخدام مستطيل، اشرح طريقتين على الأقل لإثبات أن القطر يقسم المستطيل إلى مثلثين متطابقين. **انظر الهامش.**

23. **تحليل الخطأ** يقول خليفة إنه من الممكن إثبات أن $\triangle ACB \cong \triangle ADE$ ولكن خميس يختلف معه. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.



24. **التبرير** حدد ما إذا كان يمكن استخدام مسلّمة ضلعين وزاوية (SSA) لإثبات تطابق مثلثين. اشرح تبريرك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

25. **تحدٍ** باستخدام المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي، اكتب برهانًا تسلسليًا يثبت أن $\triangle PVT \cong \triangle SVQ$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



26. **الكتابة في الرياضيات** كيف تعرف الطريقة (مسلّمة الأضلاع الثلاثة ومسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما إلخ) التي يتم استخدامها عند البرهنة على تطابق المثلثات؟ استخدم مخططًا لشرح تبريرك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 23، خليفة محق. لقد وضّح خميس أن كل الأزواج الثلاثة من الزوايا المتناظرة للمثلثين المتطابقين متطابقة، ولكن هذا لم يثبت أنّ $\triangle ADE \cong \triangle ACB$. في الحقيقة، قد يكون بالمثلثين زوايا متناظرة ومتطابقة، ولكن قد تختلف أطوال أضلاعها.

إجابات إضافية

17. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\overleftrightarrow{RS}$ ينصف $\angle CSA$ و $\angle CHA$ (معطيات)
2. $\overline{SH} \cong \overline{SH}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle SHC \cong \angle SHA; \angle CSH \cong \angle ASH$ (تعريف منصّف الزاوية)
4. $\triangle CHS \cong \triangle AHS$ (مسلّمة ASA)

18. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\triangle BDF$ متساوي الأضلاع، $\angle DEB \cong \angle BAD$ (معطيات)
2. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle FBD \cong \angle FDB$ (المثلثات متساوية الأضلاع تكون متساوية الزوايا)
4. $\triangle BAD \cong \triangle DEB$ (مسلّمة AAS)

19. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\angle CED \cong \angle CFD$، $\overline{CD}$ ينصّف $\angle ECF$ (معطيات)
2. $\angle ECD \cong \angle FCD$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle CED \cong \triangle CFD$ (مسلّمة AAS)

20. **البرهان:**

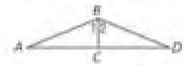
العبارات (المبررات)

1. $\overline{VK} \perp \overline{KX}; \overline{EM} \perp \overline{MX}; \overline{KX} \cong \overline{MX}$ (معطيات)
2. $\angle VKX$ and $\angle EMX$ هي زوايا قائمة (الخطوط المتعامدة تكوّن زوايا قائمة.)
3. $\angle VKX \cong \angle EMX$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)
4. $\angle KXV \cong \angle MXE$ (الزوايا الرأسية متطابقة)
5. $\triangle VKX \cong \triangle EMX$ (مسلّمة ASA)
6. $\angle V \cong \angle E$ (النظرية CPCTC)

22. الإجابة النموذجية: الطريقة 1. استخدام المسلّمة SSS لأن الأضلاع المقابلة للمستطيل تكون متطابقة، والمثلثات سوف تتشارك ضلعًا واحدًا. الطريقة 2. استخدام مسلّمة SAS لأن الأضلاع المقابلة من المستطيل تكون متطابقة، والزوايا المقابلة تكون متطابقة.

تدريب على الاختبار المعياري

27. المعطيات: $\overline{BC}$ متعامد على $\overline{AD}$، $\angle 2 \cong \angle 1$.



ما النظرية أو المسلّمة التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟ **B**

A AAS
B ASA
C SAS
D SSS

28. **الإجابة القصيرة** اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لإيجاد قيم $f(n)$ في الجدول. $\frac{1}{4}n + 3$

n	−8	−4	−1	0	1
$f(n)$	1.00	2.00	2.75	3.00	3.25

29. **الجبر** إذا كان −7 مضروبًا في عدد أكبر من 1، فأي مما يلي يصف النتيجة؟ **J**

F عدد أكبر من 7
G عدد يتراوح بين −7 و 7
H عدد أكبر من −7
J عدد أقل من −7

30. SAT/ACT $\sqrt{121 + 104} = ?$ **A**

A 15
B 21
C 25
D 125
E 225

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$. اشرح. **31–32. انظر الهامش.**

31. $A(6, 4)$, $B(1, -6)$, $C(-9, 5)$, $X(0, 7)$, $Y(5, -3)$, $Z(15, 8)$

32. $A(0, 5)$, $B(0, 0)$, $C(-2, 0)$, $X(4, 8)$, $Y(4, 3)$, $Z(6, 3)$

33. **الجبر** إذا كان $\triangle RST \cong \triangle JKL$، و $RS = 7$، و $ST = 5$، و $RT = 9 + x$، و $JL = 2x - 10$، و $JK = 4y - 5$، فارسم شكلاً يمثل المثلثات المتطابقة وحدد له أسمًا. ثم أوجد x و y. **انظر الهامش.**

34. **المعرفة المالية** يتقاضى رشيد 5 AED على طلاء صندوق البريد و 4 AED في الساعة لجز أعشاب حديقة. اكتب معادلة تمثل مقدار المال الذي يستطيع رشيد أن يكسبه من مالك منزل يطلي صندوق بريده ويجز أعشاب حديقته. $y = 4x + 5$

مراجعة المهارات

البرهان اكتب برهانًا من عمودين لكلٍ مما يلي. **35–36. انظر الهامش.**

35. **المعطيات:** $\angle 2 \cong \angle 1$
$\angle 1 \cong \angle 3$
المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

36. **المعطيات:** $\angle MJK \cong \angle KLM$
$\angle LMJ$ و $\angle KLM$ متكاملتان.
المطلوب: $\overline{KJ} \parallel \overline{LM}$

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب ملاحظة ودراسة المفاهيم الأساسية. اجعلهم يكتبوا استنتاجًا عن أوجه التشابه والاختلاف بين مفاهيم الأمس للمسلّمات SSS و SAS، ومفاهيم اليوم للمسلمات ASA و AAS.

إجابات إضافية

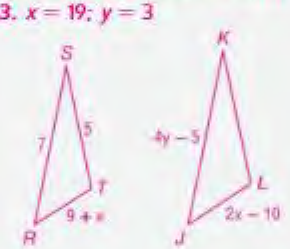
31. $AB = \sqrt{125}$, $BC = \sqrt{221}$, $AC = \sqrt{226}$, $XY = \sqrt{125}$, $YZ = \sqrt{221}$, $XZ = \sqrt{226}$

الأضلاع المتناظرة لها القياس نفسه وتكون متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ طبقًا لمسلّمة SSS.

32. $AB = 5$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{29}$, $XY = 5$, $YZ = 2$, $XZ = \sqrt{29}$,

الأضلاع المتناظرة متساوية في القياس ومتطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ حسب مسلّمة SSS.

33. $x = 19$; $y = 3$



35. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\angle 2 \cong \angle 1$, $\angle 1 \cong \angle 3$ (معطى)
2. $\angle 2 \cong \angle 3$ (خاصية التعدي)
3. $AB \parallel DE$ (إذا كانت الزوايا الداخلية $\measuredangle$ المتبادلة $\cong$ فتكون الخطوط مستقيمة)

36. **البرهان:**

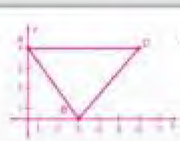
العبارات (المبررات)

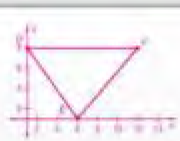
1. $\angle MJK \cong \angle KLM$, $\angle LMJ$ و $\angle KLM$ زاويتان متكاملتان. (معطيات)
2. $m\angle MJK = m\angle KLM$ (تعريف $\cong$ $\measuredangle$)
3. $m\angle LMJ + m\angle KLM = 180$ (تعريف $\cong$ التكامل $\measuredangle$)
4. $m\angle LMJ + m\angle MJK = 180$ (بالتعويض.)
5. $\angle LMJ$ and $\angle MJK$ متكاملتان. (تعريف التكامل $\measuredangle$)
6. $\overline{KJ} \parallel \overline{LM}$ (إذا كانت الزوايا الداخلية المتتالية $\measuredangle$ متكاملة، فتكون الخطوط المستقيمة)

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من الطلاب إيجاد أمثلة مضادة لأنواع البراهين التالية: SSA و AAA.

الإجابة النموذجية للمسلمة AAA: $\angle A \cong \angle D$، و $\angle B \cong \angle E$، و $\angle C \cong \angle F$. بما أن $AC = 6$ و $DF = 12$، إذًا $\overline{AC} \not\cong \overline{DF}$؛ ومن ثم $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$.





1 التركيز

الهدف استكشاف التطابق في المثلثات قائمة الزاوية.

المواد

- مساطر
- منقلة

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات من 3 أو 4، متنوعة القدرات. ثم اطلب منهم إكمال التمارين 1-3، والنشاط، والتمارين 4-6.

اطرح الأسئلة التالية:

- كيف يتم تمييز المثلثات القائمة بطريقة مختلفة عن المثلثات الأخرى؟ لوجود رمز المثلث القائم بها.
- ما الخصائص الفريدة الأخرى التي تميز المثلثات القائمة؟ الأضلاع المجاورة للزاوية القائمة تُسمّى الساقين، والضلع المقابل للزاوية القائمة يُسمّى الوتر.
- هل يوجد نوع آخر من المثلثات تُسمّى أجزاؤه بأسماء خاصة؟ المثلث متساوي الساقين

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 7 إلى 15.

12-5 مختبر الهندسة التطابق في المثلثات قائمة الزاوية

استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

في الدرسين 12-4 و 12-5، تعلمت نظريات ومسلّمات تبرهن على تطابق المثلثات. كيف يتم تطبيق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

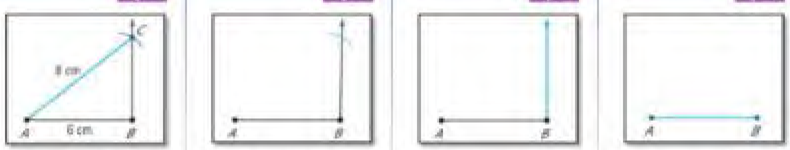
ادرس كل زوج من المثلثات قائمة الزاوية.

التحليل

1. هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إذا كان الأمر كذلك، فما نظرية أو مسلّمة التطابق المستخدمة؟ نعم، a. ضلعين وزاوية (SAS)، b. زاويتين وضلع (AAS)، c. زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)
2. أعد صياغة قواعد التطابق المأخوذة من التمرين 1 باستخدام الساق، (L)، أو الوتر، (H)، الذي يحل محل الضلع. احذف A لأية زاوية قائمة بما أننا نعلم أن كل المثلثات القائمة الزاوية تحتوي على زاوية قائمة وكل الزوايا القائمة متطابقة. a. LL, b. HA, c. LA
3. **التخمين** إذا كنت تعلم أن الساقين المتناظرتين في مثلثين قائمي الزاوية متطابقتان، فما المعلومات الأخرى التي تحتاج إليها لإثبات تطابق المثلثين؟ اشرح. لا شيء؛ يكفي زوجان متطابقان من الصيقان للبرهنة على تطابق المثلثات قائمة الزاوية.

في الدرس 12-5، تعلمت أن SSA ليست اختبارًا صالحًا لتحديد تطابق المثلثات. هل يمكن استخدام SSA في إثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟

النشاط مسلّمة ضلعين وزاوية (SSA) والمثلثات قائمة الزاوية



الخطوة 1 ارسم $\overline{AB}$ بحيث $AB = 6$ سنتيمترات.

الخطوة 2 استخدم منقلة لرسم شعاع من B متعامد على $\overline{AB}$.

الخطوة 4 افتح الفرجار بعرض 8 سم. ضع النقطة عند A وارسم قوسًا يتقاطع مع الشعاع.

الخطوة 5 سمّ التقاطع C وارسم $\overline{AC}$ لاستكمال $\triangle ABC$.

التحليل

4. هل يقدم النموذج مثلثًا متفردًا؟ نعم
5. هل يمكنك استخدام طول الوتر وطول الساق لإثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟ نعم
6. التخمين بخصوص حالة SSA التي تنطبق على المثلثات قائمة الزاوية. SSA اختبار صالح لتطابق المثلثات قائمة الزاوية.

(يتبع في الصفحة التالية)

المتابعة

استكشف الطلاب مسلّمات ونظريات تطابق المثلثات.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا تعد مسلّمات تطابق المثلثات مفيدة؟ الإجابة النموذجية: تسمح لك المسلّمات والنظريات بإثبات تطابق المثلثات من خلال استخدام ثلاثة فقط من أجزاء المثلث المتطابق.

مختبر الهندسة
التطابق في المثلثات قائمة الزاوية عبر

يوفر عملك في الصفحة السابقة دليلاً على أربع طرق لإثبات تطابق المثلثات قائمة الزاوية.

النظرية تطابق المثلثات قائمة الزاوية

النظرية 12.6 تطابق بتساوي ساقين
إذا كانت ساقا مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساقين المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *LL* يرمز إلى تساوي ساقين

النظرية 12.7 تطابق وتر وزاوية
إذا كان الوتر وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقين مع الوتر والزاوية الحادة المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *HA* يرمز إلى وتر وزاوية

النظرية 12.8 تطابق ساق وزاوية
إذا كانت ساق واحدة وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساق والزاوية الحادة المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *LA* يرمز إلى ساق وزاوية

النظرية 12.9 تطابق وتر وساق
إذا كان الوتر وساق في مثلث قائم الزاوية متطابقان مع الوتر والساق المتناظرين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *HL* يرمز إلى وتر وساق

التمارين

حدد ما إذا كان كل زوجين من المثلثات متطابقين. إذا كان الأمر كذلك، فحدد المسلّمة أو النظرية المستخدمة.

7.  نعم، LA

8.  لا

9.  نعم، HL

البرهان **اكتب برهاناً لكلٍ مما يلي.** 10–11. انظر ملحق إجابات الوحدة 12. 13–12. انظر الهامش.

10. النظرية 12.6
11. النظرية 12.7
12. النظرية 12.8 (تلميح: هناك حالتان محتملتان)
13. النظرية 12.9 (تلميح: استخدم نظرية فيثاغورس)

استخدم الشكل على اليسار. 14–15. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

14. **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

15. **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, E نقطة منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 13–10 للتأكد من فهم الطلاب لطريقة كتابة برهان حرّ. استخدم التمارين 15–14 للتأكد من فهم الطلاب متى يستخدمون نظريات تطابق المثلثات القائمة في البرهان.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب كتابة معادلة جبرية للمثلث القائم تثبت أنّ مجموع الزوايا الأخرى يساوي 90. إذا كان $m\angle C = 90$ و $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ حسب نظرية مجموع الزوايا. إذا $m\angle A + m\angle B = 90$.

إجابات إضافية

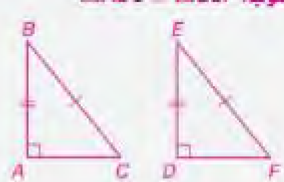
12. **الحالة 1:**
المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

البرهان: من المعطيات $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ قائما الزاوية $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ حسب تعريف المثلثات القائمة، $\angle A$ و $\angle D$ زوايا قائمة. إذًا، $\angle A \cong \angle D$ نظرًا لأن كل الزوايا القائمة متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ حسب المسلّمة ASA.

الحالة 2:
المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle EFD$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{CB} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle F$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EFD$

البرهان: من المعطيات $\triangle ABC$ و $\triangle EFD$ قائما الزاوية $\overline{CB} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle F$ حسب تعريف المثلثات قائمة الزاوية، $\angle A$ و $\angle E$ زوايا قائمة. إذًا $\angle A \cong \angle E$ نظرًا لأن كل الزوايا القائمة متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ حسب المسلّمة AAS.

13. **المعطيات:** $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية.
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



البرهان: العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (معطيات)
2. $AB = DE$, $BC = EF$ (تعريف التطابق)
3. $(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2$, $(DE)^2 + (FD)^2 = (EF)^2$ (نظرية فيثاغورس)
4. $(AB)^2 + (CA)^2 = (DE)^2 + (FD)^2$ (خاصية التعويض)
5. $(AB)^2 + (CA)^2 = (AB)^2 + (FD)^2$ (خاصية التعويض)
6. $(CA)^2 = (FD)^2$ (خاصية الطرح)
7. $CA = FD$ (خواص الجذور التربيعية)
8. $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (مسلّمة SSS)